

GEOMETRIK MASALALARNI TENGLAMALAR SISTEMASI YORDAMIDA YECHISH

Yusupov Odil,

I.Karimov nomidagi TDTU akademik litseyi o'qituvchisi

Ostonayev Elyor,

A.Avloniy nomidagi pedagogik mahorat milliy instituti

“Aniq va tabiiy fanlar” metodikasi kafedrasi katta o'qituvchisi

Annotatsiya: Mazkur maqolada geometrik masalalarni yechishda tenglamalar sistemasi yordamida algebraik yondashuvni qo'llashning ilmiy-metodik asoslari tahlil qilingan. Geometrik va algebraik usullarni integratsiyalash orqali murakkab masalalarni yechish samaradorligi asoslab berilgan. Xususan, uchburchaklarga doir masalalarda yuzalar va kesmalar orasidagi bog'lanishlarni tenglamalar sistemasi orqali ifodalash, noma'lum miqdorlarni aniqlash va natijalarni tahlil qilish usullari yoritilgan. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, taklif etilgan yondashuv o'quvchilarning matematik modellashtirish, mantiqiy fikrlash va muammoni turli usullar orqali yechish kompetensiyalarini rivojlantirishga xizmat qiladi. Shuningdek, ushbu metodika matematika ta'limida formalizmni kamaytirish va o'quvchilarning mustaqil ijodiy faoliyatini faollashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit so'zlar: tenglamalar sistemasi, geometrik masalalar, matematik modellashtirish, algebraik usul, geometrik yondashuv, uchburchak, yuzalar nisbati, Cheva teoremasi, mantiqiy fikrlash, kompetensiya.

Решение геометрических задач с системой уравнений

Юсупов Одил,

*преподаватель академического лицея ТТТУ
имени И.Каримова*

Элёр Остонаев,

*старший преподаватель методики
преподавания “Точных и естественных наук”
в Национальном институте педагогических
навыков имени А.Авлони*

Аннотация: В статье рассмотрены научно-методические основы решения геометрических задач с использованием систем уравнений. Обоснована эффективность интеграции геометрических и алгебраических методов при решении задач повышенной сложности. В частности, показаны способы моделирования взаимосвязей между площадями и отрезками в треугольниках с помощью систем уравнений, а также методы нахождения неизвестных величин и анализа полученных результатов. Результаты исследования показывают, что предложенный подход способствует развитию математического моделирования, логического мышления и навыков решения задач различными способами у учащихся. Кроме того, данная методика направлена на снижение формализма в обучении математике и активизацию самостоятельной творческой деятельности учащихся.

Ключевые слова: система уравнений, геометрические задачи, математическое моделирование, алгебраический метод, геометрический подход, треугольник, отношение площадей, теорема Чевы, логическое мышление, компетенции.

Solution of geometric problems with the system of equations

Yusupov Odil,

*teacher of the academic lyceum of TSTU named
after I. Karimov*

Ostonayev Elyor,

*Senior Lecturer of the Department Methodology of
Exact and Natural Sciences at the National Institute
of Pedagogical Skills named after A. Avloni*

Abstract: *This article analyzes the scientific and methodological foundations of solving geometric problems using systems of equations. It substantiates the effectiveness of integrating geometric and algebraic approaches in solving complex problems.*

In particular, the article explores the methods of modeling relationships between areas and segments in triangles using systems of equations, as well as techniques for determining unknown quantities and analyzing results. The results of the study ensures that the proposed approach contributes to the development of students mathematical modeling skills, logical thinking, and the ability to solve problems using multiple methods. Furthermore, this methodology helps reduce formalism in mathematics education and enhances students independent creative activities.

Keywords: *system of equations, geometric problems, mathematical modeling, algebraic method, geometric approach, triangle, area ratio, Cheva's theorem, logical thinking, competency.*

Hozirgi kunda matematika ta'limi holdida turgan dolzarb vazifalardan biri o'quvchilarning nafaqat nazariy bilimlarini shakllantirish, balki ularni amaliy vaziyatlarda qo'llay olish, mustaqil fikrlash va muammoni turli usullar bilan yechish ko'nikmalarini rivojlantirishdan iboratdir. Shu nuqtai nazardan, geometrik masalalarni yechish jarayonida turli metodlarning qo'llanilishi, xususan, algebraik yondashuvlardan foydalanish muhim ahamiyat kasb etadi. Amaliyot shuni ko'rsatadiki, ko'plab o'quvchilar geometrik masalalarni faqat an'anaviy usullar orqali yechishga odatlanib qolgan bo'lib, murakkab masalalarda qiyinchiliklarga duch keladilar. Bunday holat esa ularning matematik tafakkurining cheklanishiga va bilimlarning formal o'zlashtirilishiga olib keladi. Shu sababli geometrik masalalarni yechishda algebraik usullarni, xususan, tenglamalar sistemasi yordamida yechish metodikasini qo'llash zarurati yuzaga keladi. Tenglamalar sistemasi yordamida geometrik masalalarni yechish o'quvchilarga masalani matematik modellashtirish, noma'lum miqdorlarni aniqlash hamda natijalarni tahlil qilish imkonini

beradi. Bu esa o'z navbatida o'quvchilarning mantiqiy fikrlashini rivojlantiradi, ularni turli yechim usullarini solishtirishga va eng samarali usulni tanlashga o'rgatadi. Mazkur maqolaning maqsadi geometrik masalalarni tenglamalar sistemasi yordamida yechishning ilmiy-metodik asoslarini yoritish hamda ushbu yondashuvning o'quvchilarning matematik tafakkurini rivojlantirishdagi ahamiyatini asoslab berishdan iborat. Ma'lumki, har qanday jamiyatda texnika taraqqiyoti kundalik turmush tarzidan tortib yuqori avtomatlashgan ishlab chiqarish jarayonlarini bajarishgacha matematika fani qonuniyatlarisiz amalga oshmaydi. Shu nuqtai nazardan olib qaraganda matematika fanini alohida o'qitish, amaliyotga tadbiiq etishga e'tibor berish shu kunning muhim vazifasi hisoblanadi.

O'quvchilarning bilimidagi uchrayotgan kamchiliklarni bartaraf etish uchun maktabda matematika fanining asosiy g'oyalarini birinchi o'ringa qo'yish bilan erishish mumkin. Bu g'oyalar quyidagilardan iborat, ya'ni to'plam haqidagi tushuncha, son to'g'risida ta'limot, funksiyalar to'g'risidagi ta'limot, matematika-ning amalda tatbiq etilishi, aksiomatik metod

haqidagi tushunchalar, tenglama va tengsizliklar haqidagi ta'limotdan, shuningdek, zaruriy va yetarlilik, mavjudlik va yagonalik kabi asosiy mantiqiy toifalar bilan uyg'unlashtirish va boshqalardan iboratdir. Bu g'oyalarning rivojlanish tartibi qat'iy ravishda maktab dasturlarida belgilanilishi kerak. O'quvchilar uchun qiyinlik darajasidagi misollar, ya'ni differensial va integral hisoblar, matematik analiz vositalarini kiritish muammoli bo'lib, differensial va integral hisob g'oyalarini ommabop qilib berishga urunish fanning mohiyatini buzishga olib keladi.

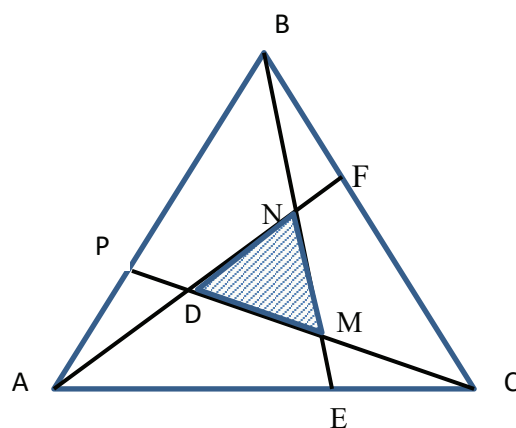
Matematika fanini bayon qilishda hamma asosiy tushuncha va teoremlarning ta'riflarini juda ham ravshan qilib ochib berish kerak. O'quvchi o'rta maktab dasturiga kiritilgan har bir matematik tushunchalarning ta'rifini ochiq – oydin aytib bera olishi, shu fan hajmida har bir teoraemani ravshan ta'riflay olishi kerak. Shu bilan birga asosiy tushunchalarni misollar bilan tushuntira olishi, teorema shartlarining zarurligini tushunish va teorema isbotining qaysi joylarida bu shartlardan foydalanish kerakligini tushunishi lozim. Ta'riflarni tushunmaslik, teoremlarni ravon ifoda qilishni bilmaslik, masalalar yechishda va nazariy xulosalar chiqarishda bu asosiy tushunchalardan foydalana olmaslik va ularni tatbiq eta olmaslik g'oyat katta nuqsondir, chunki bu nuqsonlar masalalar yechishda va isbot qilishda ko'p xatoliklarning kelib chiqishiga sabab bo'libgina qolmasdan, balki asosiy qoidalarni quruq yodlab olib, ulardan amalda (masalalar yechishda va teoremlarni isbot qilishda) foydalana bilmaslik o'quvchilar bilimlarida formalizmga olib keladi [3].

Bir qancha tipik masalalarni yechishda bir xil yo'l juda muhim, biroq masalalarni yechishda, geometrik yasashlar va mulohaza qilishda "sun'iy" usullarni qo'llashdan ham qochmaslik kerak. Matematikaga ko'proq qiziqqan o'quvchilarni, misol va masalalarni yechishda turli

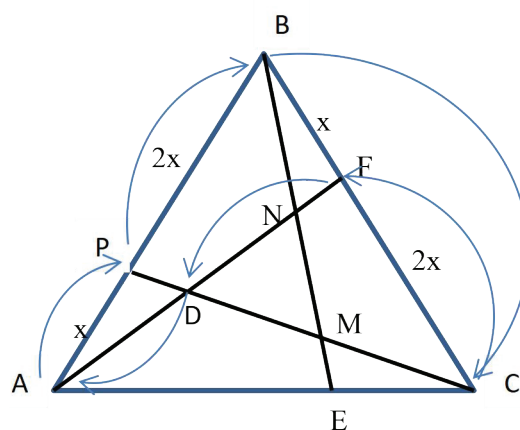
usullar bilan tanishtirish, ularda noan'anaviy yondoshuvini oshirish juda muhimdir [2].

Bu maqolada o'vchilarga yuqorida aytilganidek masalalarning ba'zilarini yechishda qo'llaniladigan noan'anaviy va isbot qilish usullari bilan tanishtirishdan iborat. Bularning hammasi, maktablarda qo'llaniladigan boshqa tadbirlar bilan bir qatorda, o'quvchilarning matematika bilimidagi formalizmni uzil – kesil yo'q qilishga va o'quvchilarning matematik saviyalarini yanada o'stirishga yordam beradi [1].

Masala. Teng tomonli uchburchakning har bir tomoni 3 ta teng bo'lakka bo'lib, bo'linish nuqtalarini, chizmadagi kabi tegishli tomon qarshisidagi uch bilan tutashtirilgan. Bu tutashtiruvchi chiziqlar hosil qilgan uchburchak yuzining berilgan uchburchak yuziga nisbatini toping. $\frac{S_{DNM}}{S_{ABC}} = ?$.



1-chizma



2-chizma

Yechish: Birinchi usul. S – berilgan $\triangle ABC$ uchburchakning yuzi bo'lsin, $\triangle DNM$ uchburchakning yuzini $\triangle ABC$ uchburchak yuzi orqali ifodalab olamiz. Masalaning $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$ shartiga

ko'ra $\frac{S_{ABF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$ bo'ladi. Bundan $S_{ABF} = \frac{S}{3}$ va

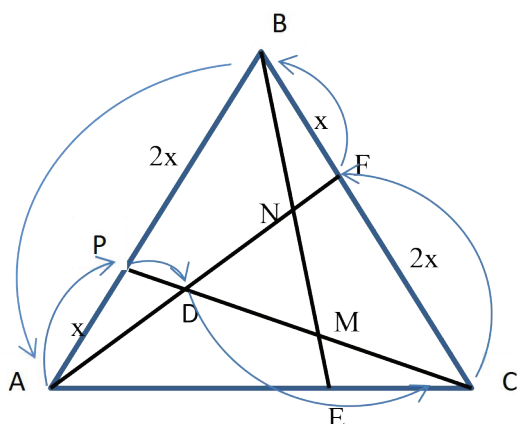
$$S_{ACF} = \frac{2S}{3}$$

$\frac{AD}{DF}$ $\triangle ADC$ uchburchakning yuzini topish uchun nisbatni topamiz.

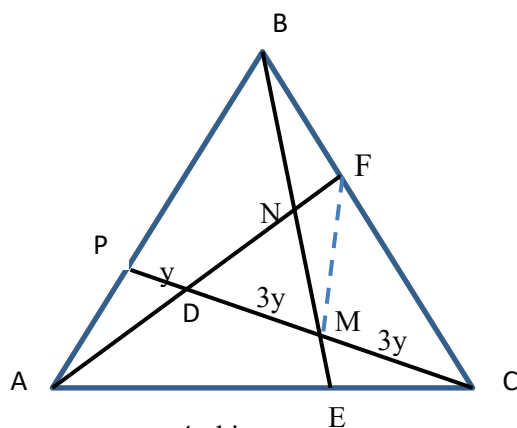
Cheva teoremasiga ko'ra $\frac{BC}{CF} \frac{FD}{DA} \frac{AP}{PB} = 1$

(2-chizma); $\frac{3x}{2x} \frac{FD}{DA} \frac{x}{2x} = 1$ bundan $\frac{AD}{DF} = \frac{3}{4}$

ekanligi kelib chiqadi.



3-chizma



4-chizma

Cheva teoremasiga ko'ra $\frac{CF}{FB} \frac{BA}{AP} \frac{PD}{DC} = 1$

(3-chizma); $\frac{2x}{x} \frac{3x}{x} \frac{PD}{DC} = 1$ bundan $\frac{PD}{DC} = \frac{1}{6}$

ekanligi kelib chiqadi. Demak PC kesma kesishish nuqtalarida $PD : DM : MC = 1 : 3 : 3$ nisbatda bo'linadi.

$$\frac{AD}{AF} = \frac{3}{7}$$

bo'lgani uchun $\triangle ADC$ uchburchakning yuzi $S_{ADC} = \frac{3}{7} S_{AFC} = \frac{3}{7} \frac{2}{3} S = \frac{2}{7} S$,

$\triangle DFC$ uchburchakning yuzi esa $S_{DEC} = \frac{8}{21} S$.

$\frac{DM}{MC} = \frac{3}{3}$ bo'lgani (4-chizma) uchun

$\triangle DFM$ va $\triangle ECM$ uchburchaklarning yuzalari $S_{DFM} = S_{FMC} = \frac{1}{2} S_{DEC} = \frac{4}{21} S$ ga teng.

$$\frac{EN}{ND} = \frac{1}{3}$$

bo'lgani uchun $\triangle ENM$ uchburchakning yuzi $S_{ENM} = \frac{1}{4} S_{DEM} = \frac{1}{4} \frac{4}{21} S = \frac{1}{21} S$,

$\triangle DNM$ uchburchakning yuzi esa $S_{DMN} = \frac{3}{4} \frac{4}{21} S = \frac{1}{7} S$ ga teng.

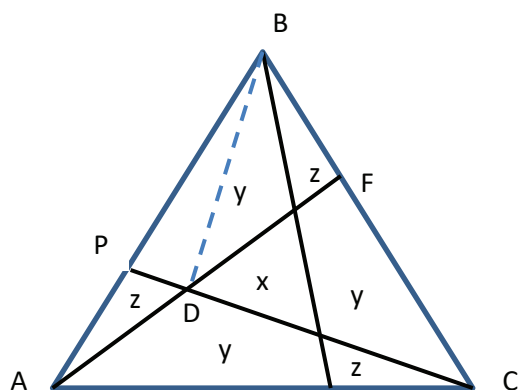
Demak, berilgan yuzalar nisbati

$$\frac{S_{DNM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{7} S}{S} = \frac{1}{7} \text{ ga teng.}$$

Endi yuqorida berilgan masalani yechishda tenglamalar sistemasidan foydalaniladi. Izlanayotgan yuza bilan yana bir nechta “noma'lum” yuzalar qaraladi. So'ngra bu no'malum va izlanayotgan yuzalarning hammasini o'z ichiga oladigan tenglama tuziladi [5,6,7].

Masala. Teng tomonli uchburchakning har bir tomoni 3 ta teng bo'lakka bo'linib, bo'linish nuqtalarini, chizmadagi kabi tegishli tomon

qarshisidagi uch bilan tutashtirilgan. Bu tutash-tiruvchi chiziqlar orqali hosil qilingan uch-burchak yuzining berilgan uchburchak yuziga nisbatini toping. $\frac{S_{DNM}}{S_{ABC}} = ?$



5-chizma

Yechish: Ikkinchi usul. S – berilgan uch-burchak yuzi, x – esa o'tkazilgan chiziqlar orqali hosil qilgan uchburchakning yuzi bo'lsin. Masala shartidagi tutashtiruvchi chiziqlar uchburchakda to'rtburchaklar va uchburchaklar hosil qiladi. Har bir to'rtburchak yuzini y bilan, har bir uchburchakning yuzini esa z bilan belgilanadi. U holda $S_{ABC} = S$ bo'lgani uchun:

$$x + 3y + 3z = S. \quad (1)$$

$\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$ bo'lgani uchun $S_{ABF} = \frac{S}{3}$ va bundan

$$y + 2z = \frac{S}{3}. \quad (2)$$

Uchinchi tenglamani tuzish uchun D nuqtani B nuqta bilan tutashtiriladi. U holda $\triangle DBP$ yuzi $2z$ teng bo'ladi va $\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = 2$ bo'lganidan $\frac{z + y}{3z} = 2$. Natijada,

$$y = 5z. \quad (3)$$

(1), (2) va (3) tenglamalar sistemasi xosil kilinadi:

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = S \\ y + 2z = \frac{S}{3} \\ y = 5z \end{cases},$$

va $x = \frac{S}{7}$ ekanligi topiladi.

Bundan esa izlangan nisbat $\frac{1}{7}$ ga teng ekanligi chiqadi.

Bu usulning kam qo'llanishi yuzlarni hisoblashga doir masalalar tematikasi jihatdan bir xil bo'lishidir. Odatda ma'lum miqdorlar burchaklar, kesmalar bo'lib, noma'lumlari esa yuzlardir. Biz geometrik miqdorlarning aytib o'tilgan rollarini mexanik ravishda almashtirishni ko'zda tutmaymiz, yuzlarni topishga doir masalalar, uchburchak va ko'pburchak yuzlarini topish haqidagi ma'lum formulalarga bog'liq ravishda emas, balki yuzalar mustaqil miqdor ravishda berilgan masalalarda foydalidir.

Yuqorida olib borilgan muloxazalardan kelib chiqqan holda, o'kuvchiga quyidagi masalalarni yechishda mustaqil yondashuvini rivojlantirish maqsadida masalar keltiriladi.[4]

1-masala. ABC uchburchakning BC , CA va AB tomonlarida mos ravishda shunday P, Q, R nuqtalar olinganki,

$$\frac{BP}{PC} = \alpha, \frac{CQ}{QA} = \beta, \frac{AR}{RB} = \gamma.$$

PQR uchburchak yuzining ABC uchburchak yuziga nisbatini toping.

2-masala. P va Q nuqta ABC uchburchakning BC va CA tomonlarini ushbu:

$$\frac{BP}{PC} = \alpha, \frac{CQ}{QA} = \beta$$

nisbatda bo'ladi. O nuqta AP va BQ chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'lsa, u holda $OPCQ$ to'rtburchak yuzining ABC uchburchak yuziga nisbatini toping.

3-masala. ABC uchburchakning tomonlari $\frac{BP}{PC} = \alpha, \frac{CQ}{QA} = \beta, \frac{AR}{RB} = \gamma$ nisbatlarda bo'lingan balsa, u holda AP bilan hosil qilingan $A'B'C'$ uchburchak yuzining ABC uchburchak yuziga nisbatini toping.

4-masala. Yuza S ga teng bo'lgan ABC uchburchak ichidan O nuqta olingan. AO va BO chiziqlar uchburchakni 4 bo'lakka ajratadi. Bunda: $S_{AOB} = a$, $S_{OPCQ} = b$. BOP va $OACQ$ uchburchak yuzlarini toping.

Xulosa o'rnida aytish joizki, maqolada geometrik masalalarni tenglamalar sistemasi yordamida yechishning ilmiy-metodik asoslari tahlil qilindi hamda geometrik va algebraik yondashuvlarning integratsiyasi samaradorligi asoslab berildi. Tadqiqot jarayonida geometrik masalalarni algebraik modellash orqali yechish o'quvchilarning matematik tafakkurini rivojlantirishda muhim omil ekanligi aniqlandi. O'tkazilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, tenglamalar sistemasi yordamida yechish usuli o'quvchilarga masalani chuqurroq anglash, noma'lum miqdorlar o'rtasidagi bog'lanishni

aniqlash hamda yechimni asoslash imkonini beradi. Bu esa ularning mantiqiy fikrlashini rivojlantirish, muammoni turli usullar bilan hal qilish va optimal yechimni tanlash ko'nikmalarini shakllantiradi. Shuningdek, ushbu metodik yondashuv matematika ta'limida uchraydigan formalizmni kamaytirish, o'quvchilarning mustaqil ijodiy faoliyatini faollashtirish hamda fanlararo integratsiyani ta'minlashga xizmat qiladi. Natijada, geometrik masalalarni tenglamalar sistemasi yordamida yechish usulini ta'lim jarayoniga keng joriy etish o'quvchilarning matematik savodxonligini oshirish, ularning bilimlarini amaliyotda qo'llash ko'nikmalarini rivojlantirish va zamonaviy ta'lim talablariga mos kompetensiyalarni shakllantirishda samarali vosita ekanligi aniqlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. O.Q. Yusupov. "Information and communication technologies in the organization and development of independent creative work of young people". SCIENCE AND INNOVATION international scientific journal. Volume 2. ISSUE 6. June 2023. P.91-97.
2. O.K. Yusupov, J.I. Buranov. "Nekotorye voprosy matematicheskogo obrazovaniya v akademicheskix litseyax: istoriko- matematicheskii obzor obucheniya geometrii". O'zbekiston Milliy universiteti xabarlari, 2025, [1/3], ISSN 2181-7324. Str. 210-213.
3. O.Q. Yusupov, N.B. Shamsiddinov. Uchburchak ichidagi nuqtadan uchburchak uchlarigacha bo'lgan masofaga ko'ra elementlarini topish // "Ta'lim sifati samaradorligini oshirishda xalqaro tajribalardan foydalanish: muammo va yechimlari" Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. Sirdaryo. 2020-y 28-29 aprel. b. 219-222.
4. Xusanov D.X., Shamsiddinov N.B. "Yoshlarning mustaqil ijodiy fikrlash faoliyatini rivojlantirishda geometrik masalalarning o'rni". "Halq ta'limi" ilmiy-metodik jurnal. 2020-yil. 5-son. 16-24 bet.
5. Xusanov J.X., Shamsiddinov N.B. "Geometrik masalani turli yechish usullari yordamida o'quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatini rivojlantirish". "Halq ta'limi" ilmiy-metodik jurnal. 2022-yil. 3-son.
6. O.Karimiy. Planimetriyadan hisoblashga va isbotlashga doir tanlangan masalalar. "O'qituvchi". Toshkent-1955-y.
7. J.Husanov, N.Shamsiddinov, On the role average values in solving geometric extreme. Internatsional Journal on Integrated edication. Vol.6.2022.